Osnovi računarstva I

Minimizacija prekidačkih funkcija

- **Minimizacija – Proces određivanja najjednostavnijeg mogućeg izraza koji odgovara nekoj Bulovoj funkciji**
- Minimizaciju funkcije sa malim brojem (ne više od 5) promjenljivih pogodno je vršiti upotrebom **Karnoovih mapa (K mapa)**
- Elementarnoj površini (polju) u K mapi odgovara jedan potpuni logički proizvod (minterm), odnosno potpuni logički zbir (maksterm), tj. jedan indeks.
- Shodno tome, K mapa za funkciju sa *n* promjenljivih sastoji se od 2^n kvadratnih polja koja predstavljaju elementarne površine
- Za funkciju 4 promjenljive:

X_1X_2 \ X_3X_4	00	01	11	10
00	*0*	*1*	*3*	*2*
01	*4*	*5*	*7*	*6*
11	*12*	*13*	*15*	*14*
10	*8*	*9*	*11*	*10*

- Svaka promjenljiva u mapi ima svoj značaj (X_1 najveći, X_4 najmanji)

- Potrebno je sve jedinice (ako se želi dobiti minimalna forma u obliku zbira logičkih proizvoda), odnosno nule (ako se želi dobiti minimalna forma u obliku proizvoda logičkih zbirova), u mapi prekriti površinama (odnosno, karticama) koje obuhvataju tzv. susjedna polja
- Susjedna polja su ona čiji se mintermovi, odnosno makstermovi, razlikuju u jednom bitu
- Prilikom izbora površina kojima će se prekriti polja na kojima se nalaze jedinice (odnosno nule) mora se voditi računa o nekoliko prostih pravila:
  - prekrivaju se susjedna polja što je moguće većom površinom (karticom) pri čemu broj prekrivenih polja mora biti oblika 2^n, đe je $n \in \{0,1,2,\ldots\}$;
  - broj površina (kartica) mora biti što je moguće manji;
  - preporučuje se da se prekrivanje **započne** od onih jedinica (odnosno nula) koje mogu da se prekriju samo na jedan način!

- Pretpostavimo da je K mapom sa slike zadata logička funkcija f:

$xy \backslash zp$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

1

2

- U obliku zbira potpunih logičkih proizvoda:

$$f = \overline{x}\, y\, \overline{z}\, \overline{p} + \overline{x}\, y\, \overline{z}\, p + x\, y\, z\, p + x\, y\, z\, \overline{p} + x\, \overline{y}\, z\, p + x\, \overline{y}\, z\, \overline{p}$$

- Grupisanjem prva dva minterma:

$$f = \overline{x}\, y\, \overline{z}(\overline{p} + p) + x\, y\, z\, p + x\, y\, z\, \overline{p} + x\, \overline{y}\, z\, p + x\, \overline{y}\, z\, \overline{p} =$$
$$= \overline{x}\, y\, \overline{z} + x\, y\, z\, p + x\, y\, z\, \overline{p} + x\, \overline{y}\, z\, p + x\, \overline{y}\, z\, \overline{p}$$

- Grupisanjem posljednja četiri minterma:

$$f = \overline{x}\, y\, \overline{z} + x\, z\,(y\, p + y\, \overline{p} + \overline{y}\, p + \overline{y}\, \overline{p}) = \overline{x}\, y\, \overline{z} + x\, z\,(y(p + \overline{p}) + \overline{y}(p + \overline{p})) =$$
$$= \overline{x}\, y\, \overline{z} + x\, z\,(y + \overline{y}) = \overline{x}\, y\, \overline{z} + x\, z$$

- Pretpostavimo da je K mapom sa slike zadata logička funkcija f:

$xy \backslash zp$	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	0	1	0
11	1	0	1	0
10	1	0	0	0

$$f = \overline{z} \cdot \overline{p} + y \cdot z \cdot p$$

- Pretpostavimo da je K mapom sa slike zadata logička funkcija f:

$xy \backslash zp$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	0

$$f = p + yz$$

K mape sa f-je sa dvije promjenljive

- Za Bulovu funkciju sa dvije promjenljive definišu se četiri minterma - mapa se sastoji od četiri polja:

X \ Y	0	1
0	$\bar{X}\,\bar{Y}$	$\bar{X}\,Y$
1	$X\,\bar{Y}$	$X\,Y$

m_0	m_1
m_2	m_3

Funkcija XY

X \ Y	0	1
0		
1		1

Funkcija $F(X, Y) = \sum m(1,2) = \bar{X}Y + X\bar{Y}$

X \ Y	0	1
0		1
1	1	

- *Primjer*: Odrediti minimalni oblik logičke funkcije zadate izrazom:

$$F(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \sum \mathrm{m}(1,2,3) = \mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2 + \mathrm{m}_3$$

Rješenje: Minimalni oblik funkcije možemo odrediti na tri načina:

1. Algebarski:

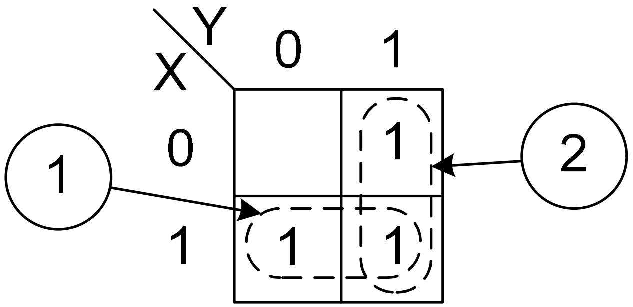
$$F = \overline{\mathrm{X}}\cdot\mathrm{Y} + \mathrm{X}\cdot\overline{\mathrm{Y}} + \mathrm{X}\cdot\mathrm{Y} = \overline{\mathrm{X}}\cdot\mathrm{Y} + \mathrm{X}\cdot(\overline{\mathrm{Y}} + \mathrm{Y}) = \overline{\mathrm{X}}\cdot\mathrm{Y} + \mathrm{X} =$$

$$= \overline{\mathrm{X}}\cdot\mathrm{Y} + \mathrm{X}\cdot(1 + \mathrm{Y}) = \overline{\mathrm{X}}\cdot\mathrm{Y} + \mathrm{X} + \mathrm{X}\cdot\mathrm{Y} = \mathrm{Y}\cdot(\overline{\mathrm{X}} + \mathrm{X}) + \mathrm{X} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$$

2. Proizvodom potpunih logičkih zbirova (makstermova):

$$F = \prod \mathrm{M}(0) = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$$

3. Upotrebom K mape:



$$F = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$$

K mape za f-je sa tri promjenljive

- U slučaju logičke funkcije sa tri promjenljive postoji osam mintermova - osam polja

X \ YZ	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

- Posmatrajmo logički zbir četiri minterma koji se nalaze u susjednim poljima Karnoove mape:

$$m_1 + m_3 + m_5 + m_7 = (\overline{X}\,\overline{Y}\,Z + \overline{X}YZ) + (X\,\overline{Y}\,Z + XYZ) =$$

$$= \overline{X}\,Z(\overline{Y} + Y) + X\,Z(\overline{Y} + Y) = \overline{X}\,Z + X\,Z = Z$$

K mape za f-je sa četiri promjenljive

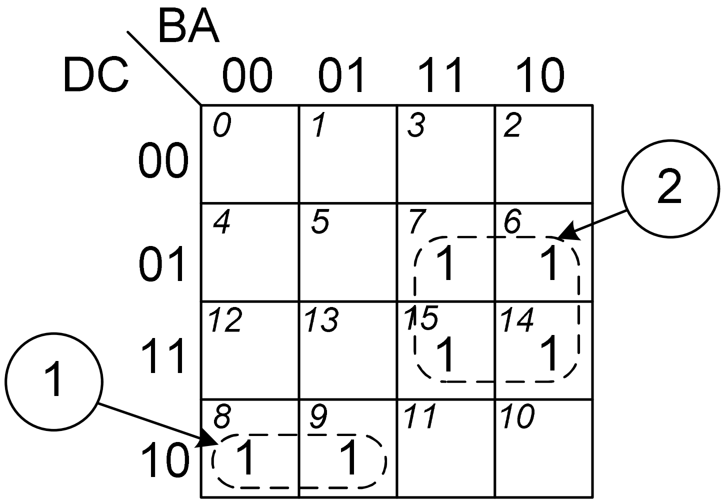
- Četiri promjenljive - šesnaest mintermova
- *Primjer*: Odrediti minimalnu formu funkcije:

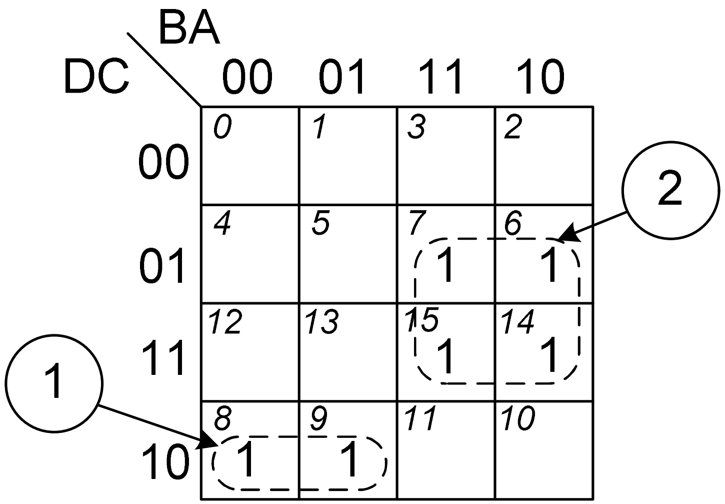
$$f(D, C, B, A) = CBA + D\bar{C}\bar{B} + CB\bar{A}$$

Rješenje:

$$f(D, C, B, A) = (D+\bar{D})CBA + D\bar{C}\bar{B}(A+\bar{A}) + (D+\bar{D})CB\bar{A} =$$

$$= m_{15} + m_7 + m_9 + m_8 + m_{14} + m_6 = \sum m(6,7,8,9,14,15)$$





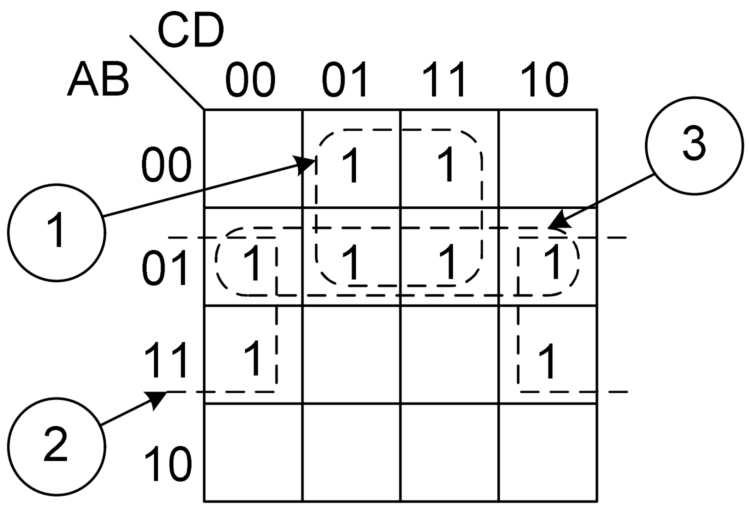
$$m_{8,9} = D\overline{C}\,\overline{B}\,\overline{A} + D\overline{C}\,\overline{B}A = D\overline{C}\,\overline{B}(\overline{A} + A) = D\overline{C}\,\overline{B}$$

$$m_{6,7,14,15} = \overline{D}CB\overline{A} + \overline{D}CBA + DCB\overline{A} + DCBA = \overline{D}CB(\overline{A} + A) + DCB(\overline{A} + A) =$$

$$= \overline{D}CB + DCB = CB(\overline{D} + D) = CB$$

$$f(D, C, B, A) = D\overline{C}\,\overline{B} + CB$$

Primjer:

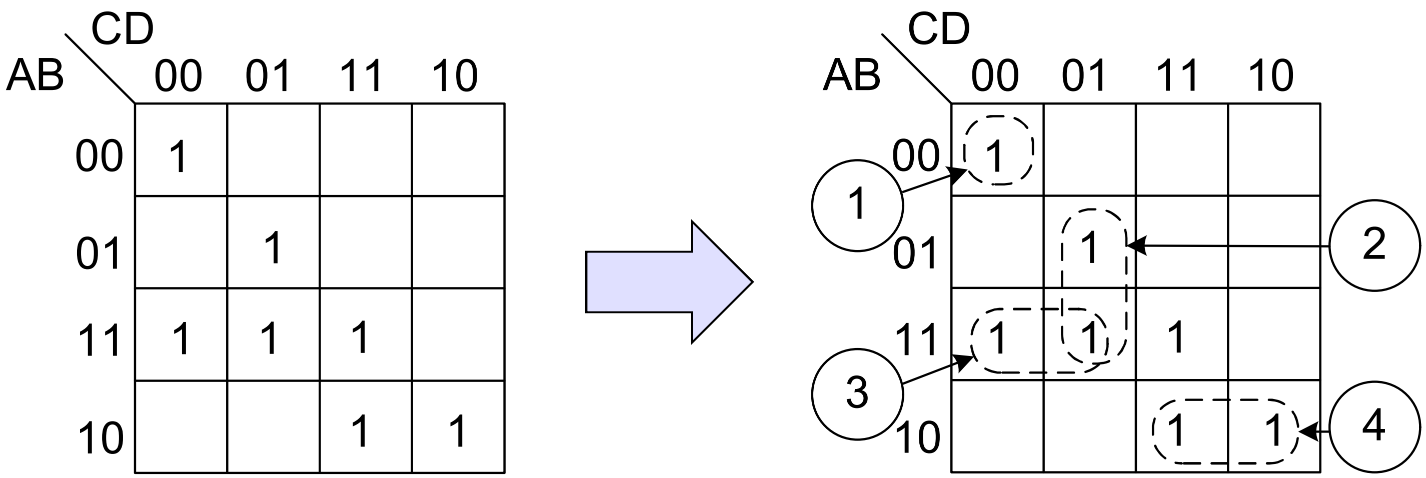


$$F = \overline{A}D + B\overline{D}$$

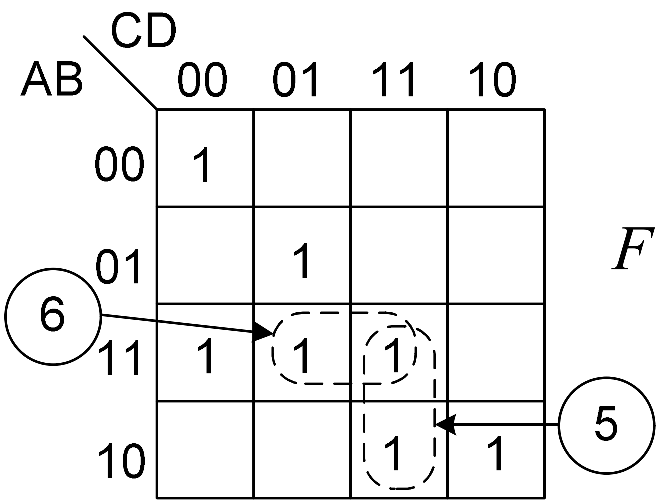
Napomena: Skupovi 1 i 2 su **bitni**, jer se mintermovi m_1 i m_3 obuhvataju samo skupom 1 zapisanim ekvivalentnim logičkim izrazom $\overline{A}D$, odnosno mintermovi m_{12} i m_{14} obuhvataju se samo skupom 2 zapisanim ekvivalentnim logičkim izrazom $B\overline{D}$

Skup 3 je **nebitan** (svi njegovi mintermovi obuhvaćeni su skupovima 1 i 2)

- *Primjer*:



bitni skupovi



nebitni skupovi

$$F = \overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{C}}\,\overline{\mathrm{D}} + \mathrm{B}\overline{\mathrm{C}}\mathrm{D} + \mathrm{A}\mathrm{B}\overline{\mathrm{C}} + \mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}\mathrm{C} + \begin{cases} \mathrm{ACD} \\ \textit{ili} \\ \mathrm{ABD} \end{cases}$$

■ *Primjer*: Naći minimalnu formu funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(\mathrm{A, B, C, D}) = \sum \mathrm{m}(0,1,2,5,8,9,10)$$

i zapisati je u obliku **proizvoda logičkih zbirova**.

Rješenje:

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	0	1

$$F = (\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}}) \cdot (\overline{\mathrm{C}} + \overline{\mathrm{D}}) \cdot (\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{D})$$

I način:

1. Pronalaženjem minimalne forme oblika zbira logičkih proizvoda, ali za funkciju **com(F)**,
2. Primjenom De Morganove T, nakon čega direktno slijedi zahtijevana minimalna forma funkcije F oblika proizvoda logičkih zborova.

II način:

Direktnim prekrivanjem logičkih 0-a u K mapi (u ekvivalentnim izrazima oblika logičkog zbira, promjenljive koje ne mijenjaju vrijednost 0 uzimaju originalnu vrijednost, a one koje ne mijenjaju vrijednost 1 – komplementiranu).

- *Primjer*: Naći minimalnu formu funkcije zadate logičkim izrazom:

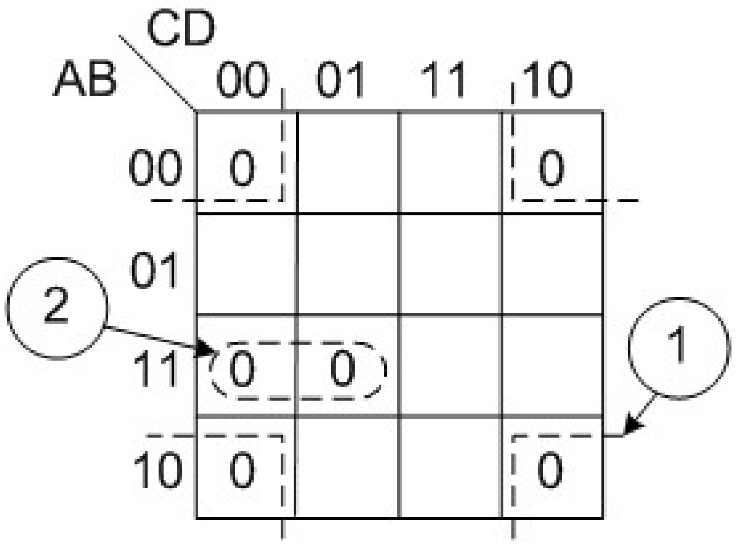
$$F(\mathrm{A, B, C, D}) = (\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}} + \mathrm{C}) \cdot (\mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D}) \cdot (\mathrm{B} + \overline{\mathrm{C}} + \mathrm{D})$$

Rješenje:

$$F = (\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}} + \mathrm{C}) \cdot (\mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D}) \cdot (\mathrm{B} + \overline{\mathrm{C}} + \mathrm{D}) = (\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}} + \mathrm{C} + \mathrm{D}) \cdot (\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}} + \mathrm{C} + \overline{\mathrm{D}}) \cdot$$

$$\cdot (\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D}) \cdot (\overline{\mathrm{A}} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D}) \cdot (\mathrm{A} + \mathrm{B} + \overline{\mathrm{C}} + \mathrm{D}) \cdot (\overline{\mathrm{A}} + \mathrm{B} + \overline{\mathrm{C}} + \mathrm{D}) =$$

$$= \prod \mathrm{M}(0, 2, 8, 10, 12, 13).$$

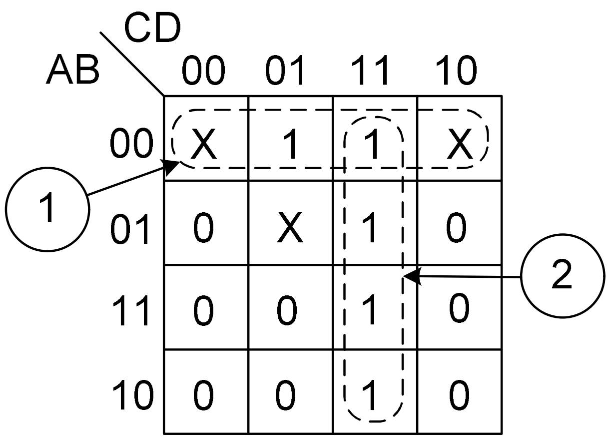


$$F(\mathrm{A, B, C, D}) = (\mathrm{B} + \mathrm{D}) \cdot (\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}} + \mathrm{C})$$

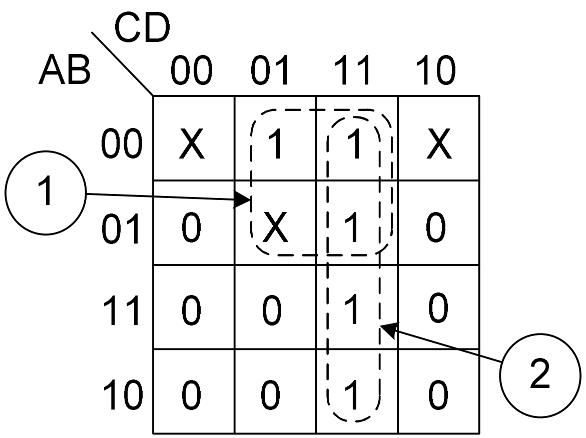
■ *Primjer*: Pronaći minimalnu formu **nekompletno definisane** funkcije F, sa tri ”bilo što” uslova:

$$F(\mathrm{A, B, C, D}) = \sum \mathrm{m}(1,3,7,11,15) + \times(0,2,5).$$

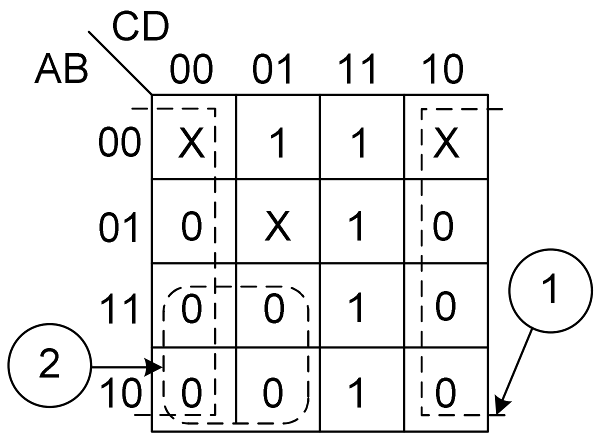
Rješenje:



$$F = \overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}} + \mathrm{C\,D}$$



$$F = \overline{\mathrm{A}}\,\mathrm{D} + \mathrm{C\,D}$$



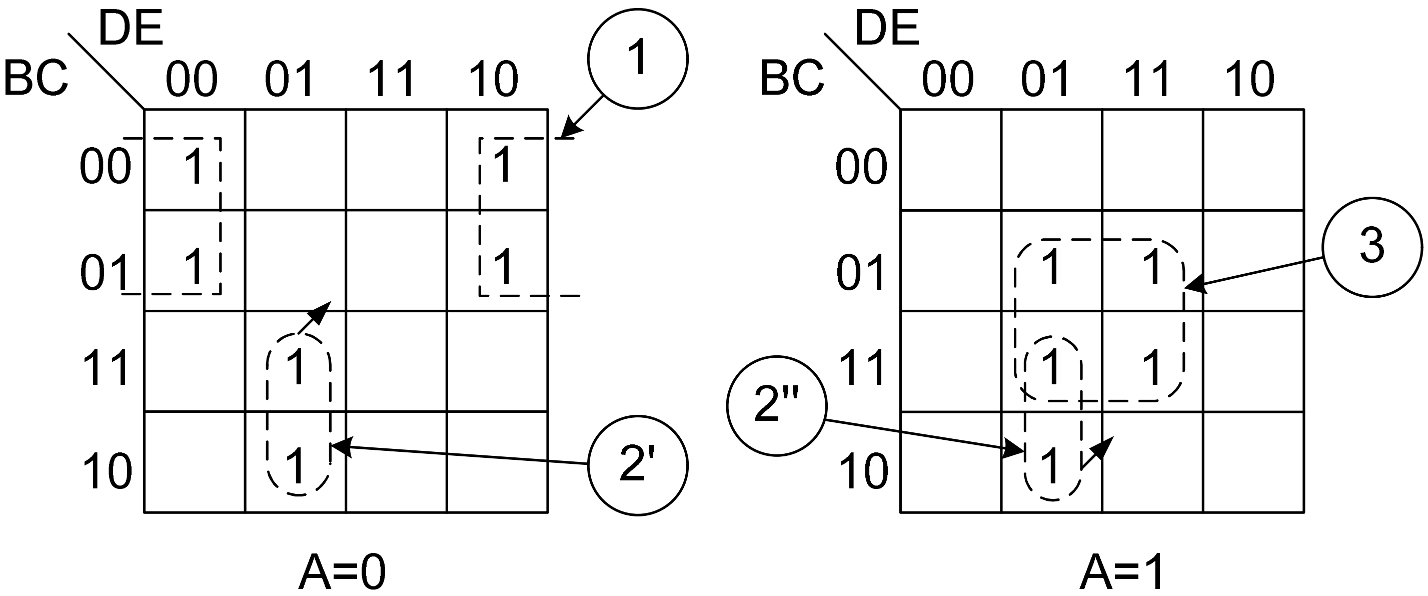
$$F = \mathrm{D} \cdot (\overline{\mathrm{A}} + \mathrm{C})$$

K mape za f-je sa pet promjenljivih

- *Primjer*: Pronaći uprošćeni oblik funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(\mathrm{A, B, C, D, E}) = \sum \mathrm{m}(0,2,4,6,9,13,21,23,25,29,31)$$

Rješenje:



$$F = \overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}}\,\overline{\mathrm{E}} + \mathrm{B}\overline{\mathrm{D}}\mathrm{E} + \mathrm{ACE}$$

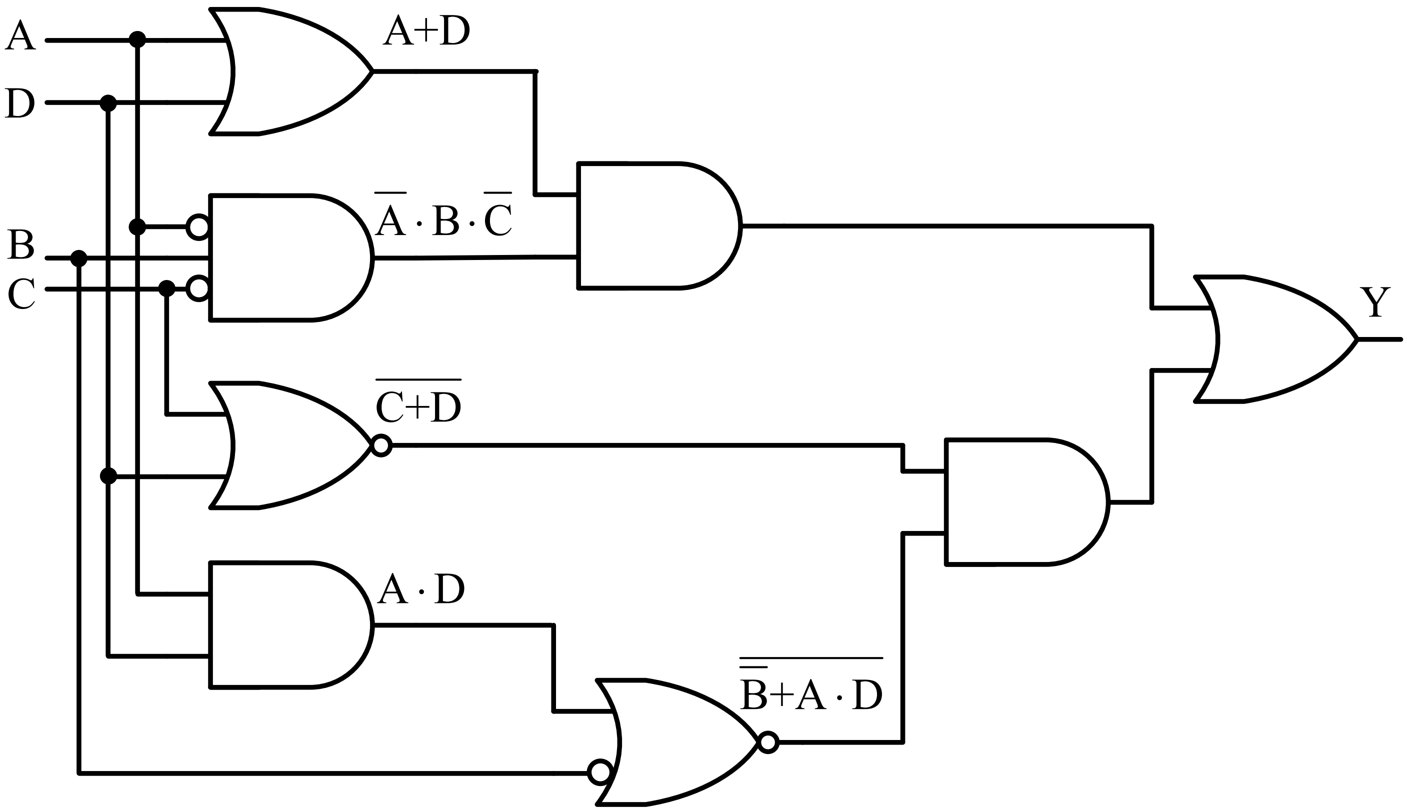
Osnovi računarstva I

Prekidačke mreže

- Posmatrajmo složenu prekidačku f-ju:

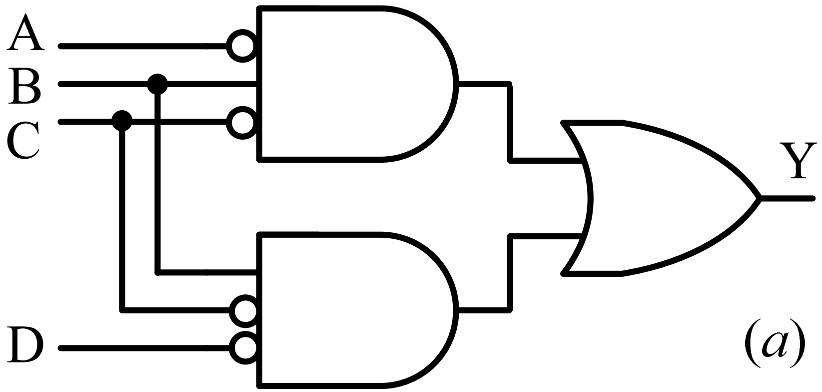
$$Y = (A + D) \cdot \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{C + D} \cdot \overline{\overline{B} + A \cdot D}$$

- Logička šema prekidačke mreže može se dobiti **direktnim preslikavanjem** posmatrane f-je u odgovarajući dijagram elementarnih logičkih kola:

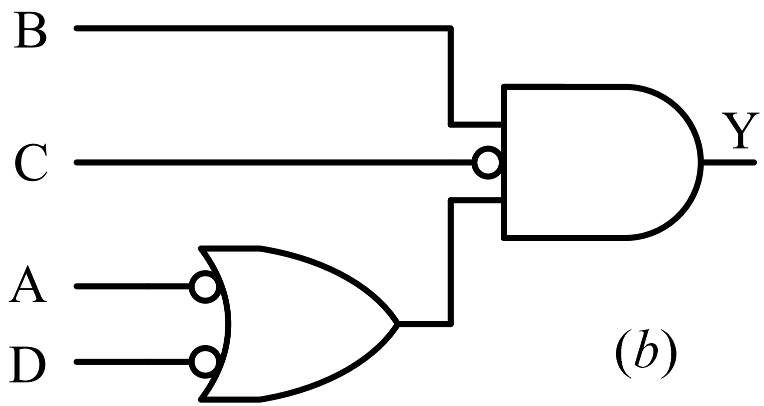


- Izlaz Y iste logičke vrijednosti veoma često se može realizovati pomoću jednostavnije mreže logičkih kola (realizacijom ekvivalentne prekidačke f-je dobijene algebarskom ili minimizacijom pomoću K mapa):

$$Y = \overline{A}B\overline{C} + B\overline{C}\overline{D} = B\overline{C} \cdot (\overline{A} + \overline{D})$$

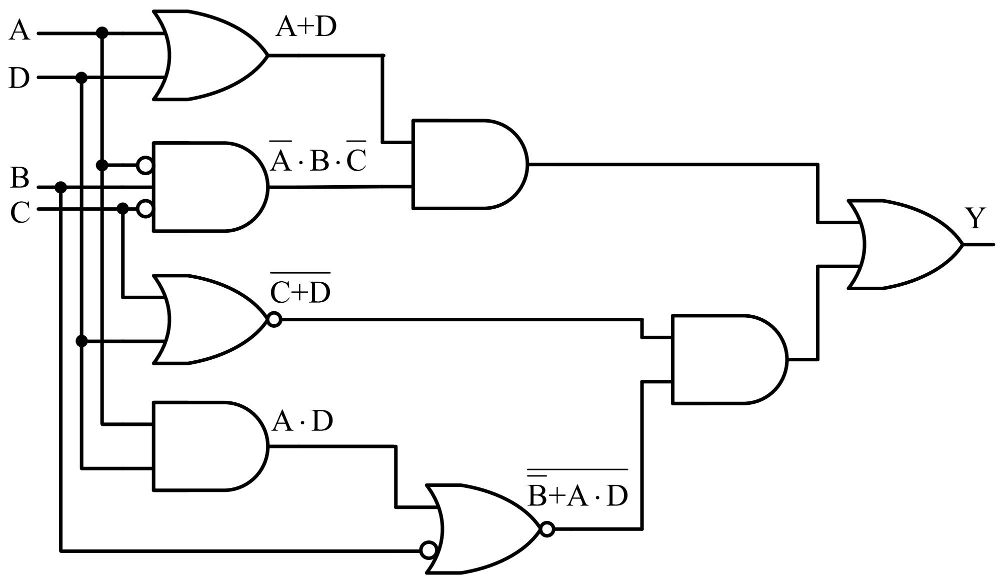


(*a*)

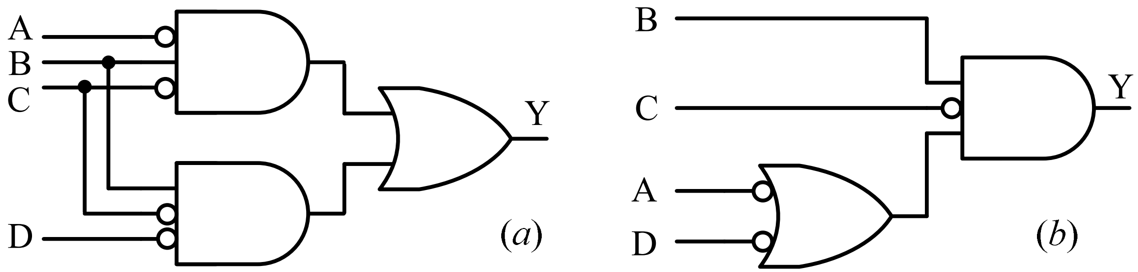


(*b*)

- **Prekidačke mreže za implementaciju funkcije ne razlikuju se samo u pogledu broja i tipa upotrijebljenih logičkih elemenata, već i po broju nivoa (stepeni) u strukturi mreže**
- **Stepen prekidačke mreže određen je najvećim br. redno vezanih log. kola kroz koja neki od ulaznih signala treba da prođe do izlaza mreže**
- Četvorostepena:



- Dvostepene:



REALIZACIJA NORMALNIH FORMI PREKIDAČKIH FUNKCIJA UPOTREBOM LOGIČKIH NI I NILI KOLA

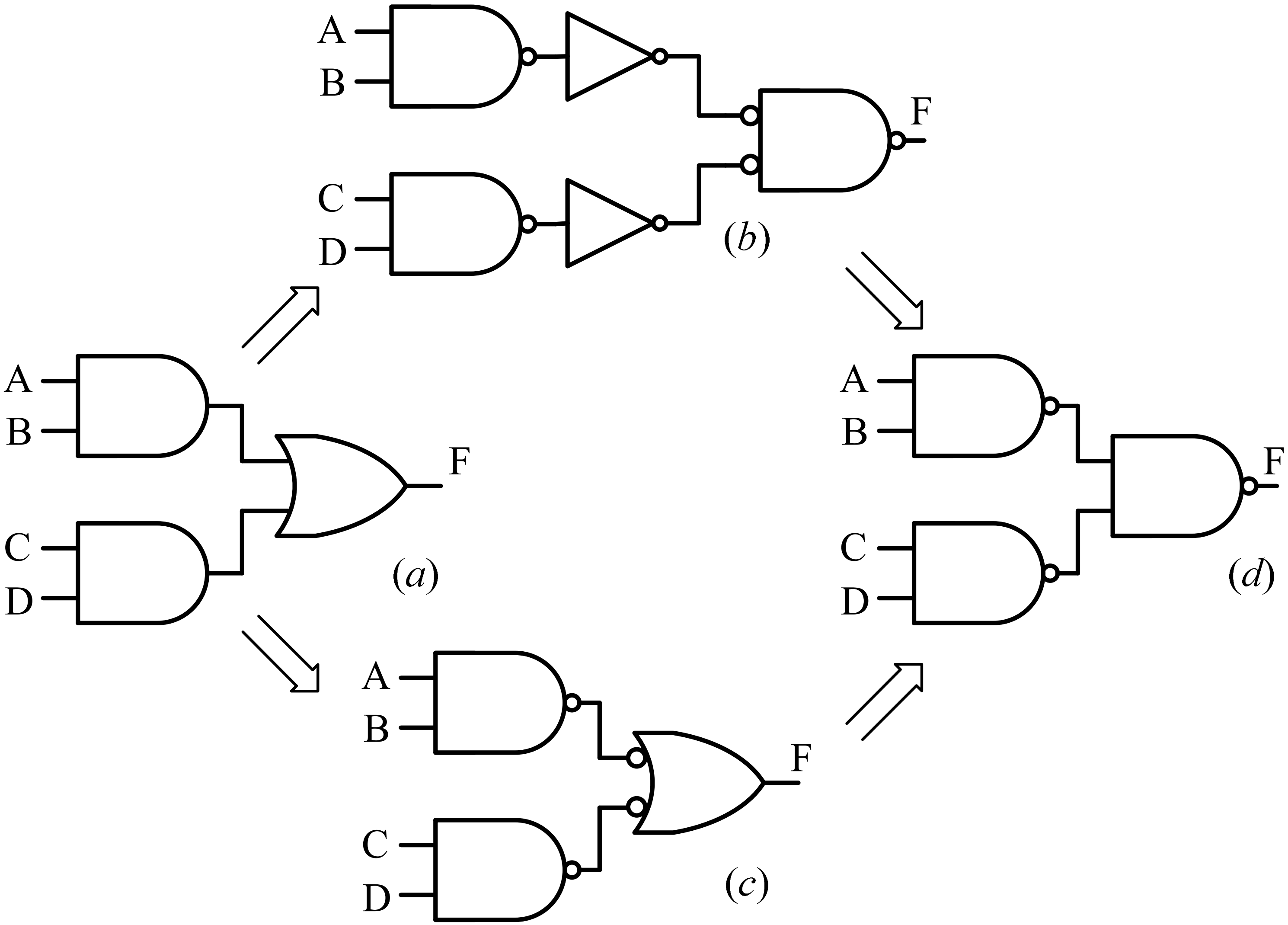
- U slučaju logičke funkcije oblika zbira logičkih proizvoda, implementacija **dvostepene** prekidačke mreže može se izvršiti **upotrebom isključivo logičkih NI kola**:

$$F = \mathrm{A}\cdot\mathrm{B} + \mathrm{C}\cdot\mathrm{D} = \overline{\overline{\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}}} + \overline{\overline{\mathrm{C}\cdot\mathrm{D}}} = \overline{\overline{\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}}\cdot\overline{\mathrm{C}\cdot\mathrm{D}}}$$

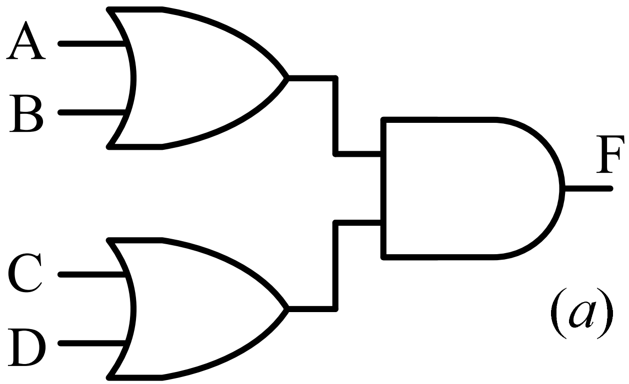
- Analogno tome, funkcije oblika proizvoda logičkih zbirova mogu se implementirati **dvostepenom** prekidačkom mrežom, **koristeći isključivo logička NILI kola**.

$$F = (\mathrm{A}+\mathrm{B})\ \cdot\ (\mathrm{C}+\mathrm{D}) = \overline{\overline{\mathrm{A}+\mathrm{B}}}\cdot\overline{\overline{\mathrm{C}+\mathrm{D}}} = \overline{\overline{\mathrm{A}+\mathrm{B}}+\overline{\mathrm{C}+\mathrm{D}}}$$

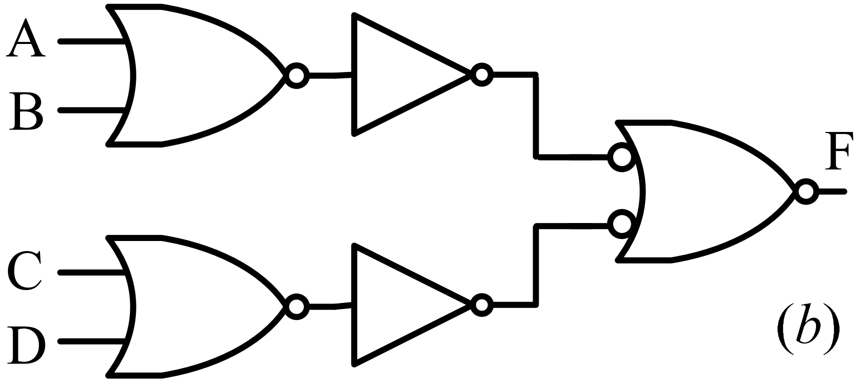
$$F = A \cdot B + C \cdot D$$



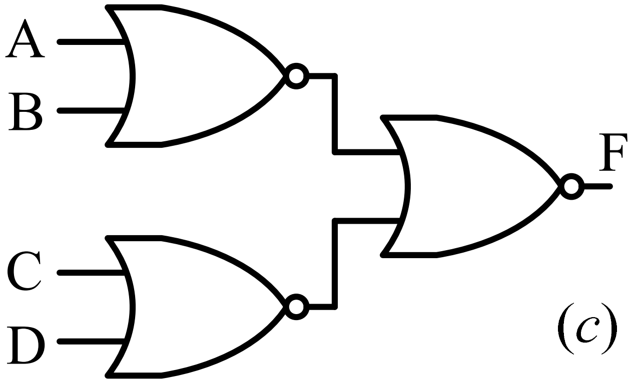
$$F=(A+B)\cdot(C+D)$$



(*a*)



(*b*)



(*c*)