

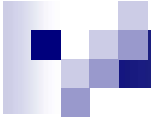


Osnovi računarstva I

Minimizacija prekidačkih funkcija

- **Minimizacija** – Proces određivanja najjednostavnijeg mogućeg izraza koji odgovara nekoj Bulovoj funkciji
- Minimizaciju funkcije sa malim brojem (ne više od 5) promjenljivih pogodno je vršiti upotrebom **Karnoovih mapa (K mapa)**
- Elementarnoj površini (polju) u K mapi odgovara jedan **potpuni logički proizvod (minterm)**, odnosno **potpuni logički zbir (maksterm)**, tj. jedan indeks.
- Shodno tome, K mapa za funkciju sa n promjenljivih sastoji se od 2^n kvadratnih polja koja predstavljaju elementarne površine
- Za funkciju 4 promjenljive:
 - Svaka promjenljiva u mapi ima svoj značaj (X_1 najveći, X_4 najmanji)

		X_3X_4			
		00	01	11	10
X_1X_2	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

- 
- Potrebno je sve jedinice (ako se želi dobiti minimalna forma u obliku zbira logičkih proizvoda), odnosno nule (ako se želi dobiti minimalna forma u obliku proizvoda logičkih zbirova), u mapi prekriti površinama (odnosno, karticama) koje obuhvataju tzv. susjedna polja
 - Susjedna polja su ona čiji se mintermovi, odnosno makstermovi, razlikuju u jednom bitu
 - Prilikom izbora površina kojima će se prekriti polja na kojima se nalaze jedinice (odnosno nule) mora se voditi računa o nekoliko prostih pravila:
 - prekrivaju se susjedna polja što je moguće većom površinom (karticom) pri čemu broj prekrivenih polja mora biti oblika 2^n , gdje je $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$;
 - broj površina (kartica) mora biti što je moguće manji;
 - preporučuje se da se prekrivanje **započne** od onih jedinica (odnosno nula) koje mogu da se prekriju samo na jedan način!

- Pretpostavimo da je K mapom sa slike zadata logička funkcija f:

		z p			
		00	01	11	10
x y	00	0	0	0	0
	01	1	1	0	0
	11	0	0	1	1
	10	0	0	1	1

Diagram showing a Karnaugh map for a 3-variable function f(x, y, z, p). The map is a 4x4 grid with rows labeled xy (00, 01, 11, 10) and columns labeled zp (00, 01, 11, 10). The values in the cells are: (00,00)=0, (00,01)=0, (00,11)=0, (00,10)=0; (01,00)=0, (01,01)=1, (01,11)=0, (01,10)=0; (11,00)=0, (11,01)=0, (11,11)=1, (11,10)=1; (10,00)=0, (10,01)=0, (10,11)=1, (10,10)=1. Two groups are circled: Group 1 (circled '1') encloses the cells (01,01), (11,01), (10,01), and (00,01). Group 2 (circled '2') encloses the cells (01,11), (11,11), (10,11), and (00,11).

- U obliku zbira potpunih logičkih proizvoda:

$$f = \bar{x} y \bar{z} \bar{p} + \bar{x} y \bar{z} p + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p}$$

- Grupisanjem prva dva minterma:

$$\begin{aligned} f &= \bar{x} y \bar{z} (\bar{p} + p) + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p} = \\ &= \bar{x} y \bar{z} + x y z p + x y z \bar{p} + x \bar{y} z p + x \bar{y} z \bar{p} \end{aligned}$$

- Grupisanjem posljednja četiri minterma:

$$\begin{aligned} f &= \bar{x} y \bar{z} + x z (y p + y \bar{p} + \bar{y} p + \bar{y} \bar{p}) = \bar{x} y \bar{z} + x z (y(p + \bar{p}) + \bar{y}(p + \bar{p})) = \\ &= \bar{x} y \bar{z} + x z (y + \bar{y}) = \bar{x} y \bar{z} + x z \end{aligned}$$

- Pretpostavimo da je K mapom sa slike zadata logička funkcija f:

		<i>zp</i>			
	<i>xy</i>	00	01	11	10
<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; width: 30px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 5px;">1</div>	00	1	0	0	0
	01	1	0	1	0
	11	1	0	1	0
	10	1	0	0	0

$$f = \bar{z} \cdot \bar{p} + y \cdot z \cdot p$$

- Pretpostavimo da je K mapom sa slike zadata logička funkcija f:

		<i>zp</i>			
	<i>xy</i>	00	01	11	10
<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; width: 30px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 5px;">1</div>	00	0	1	1	0
	01	0	1	1	1
	11	0	1	1	1
	10	0	1	1	0

$$f = p + yz$$

K mape sa f-je sa dvije promjenljive

- Za Bulovu funkciju sa dvije promjenljive definišu se četiri minterma - mapa se sastoji od četiri polja:

		Y	0	1
X				
0	$\bar{X}\bar{Y}$	$\bar{X}Y$		
1	$X\bar{Y}$	XY		

m_0	m_1
m_2	m_3

Funkcija XY

		Y	0	1
X				
0				
1				1

Funkcija $F(X, Y) = \sum m(1,2) = \bar{X}Y + X\bar{Y}$

		Y	0	1
X				
0				1
1			1	

- *Primjer:* Odrediti minimalni oblik logičke funkcije zadate izrazom:

$$F(X, Y) = \sum m(1,2,3) = m_1 + m_2 + m_3$$

Rješenje: Minimalni oblik funkcije možemo odrediti na tri načina:

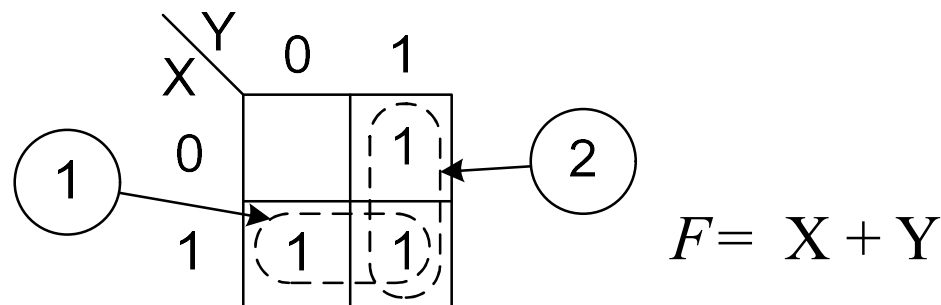
1. **Algebarski:**

$$F = \bar{X} \cdot Y + X \cdot \bar{Y} + X \cdot Y = \bar{X} \cdot Y + X \cdot (\bar{Y} + Y) = \bar{X} \cdot Y + X = \\ = \bar{X} \cdot Y + X \cdot (1 + Y) = \bar{X} \cdot Y + X + X \cdot Y = Y \cdot (\bar{X} + X) + X = X + Y$$

2. **Proizvodom potpunih logičkih zbirova (makstermova):**

$$F = \prod M(0) = X + Y$$

3. **Upotrebom K mape:**



K mape za f-je sa tri promjenljive

- U slučaju logičke funkcije sa tri promjenljive postoji osam mintermova - osam polja

X \ YZ	00	01	11	10
0	m ₀	m ₁	m ₃	m ₂
1	m ₄	m ₅	m ₇	m ₆

- Posmatrajmo logički zbir četiri minterma koji se nalaze u susjednim poljima Karnoove mape:

$$\begin{aligned}m_1 + m_3 + m_5 + m_7 &= (\bar{X}\bar{Y}Z + \bar{X}YZ) + (X\bar{Y}Z + XYZ) = \\ &= \bar{X}Z(\bar{Y} + Y) + XZ(\bar{Y} + Y) = \bar{X}Z + XZ = Z\end{aligned}$$

K mape za f-je sa četiri promjenljive

- Četiri promjenljive - šesnaest mintermova
- *Primjer*: Odrediti minimalnu formu funkcije:

$$f(D, C, B, A) = CBA + D\bar{C}\bar{B} + CB\bar{A}$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} f(D, C, B, A) &= (D + \bar{D})CBA + D\bar{C}\bar{B}(A + \bar{A}) + (D + \bar{D})CB\bar{A} = \\ &= m_{15} + m_7 + m_9 + m_8 + m_{14} + m_6 = \sum m(6,7,8,9,14,15) \end{aligned}$$

DC \ BA		BA			
		00	01	11	10
00	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
11	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

Diagram illustrating the Karnaugh map for the function $f(D, C, B, A) = CBA + D\bar{C}\bar{B} + CB\bar{A}$. The map is a 4x4 grid with rows labeled DC (00, 01, 11, 10) and columns labeled BA (00, 01, 11, 10). The cells contain the minterm numbers (0-15). The function is represented by 1s in the following cells: (01, 11), (01, 10), (11, 11), (11, 10), (10, 00), and (10, 01). Two groups are circled: Group 1 (circled '1') covers the cells (10, 00) and (10, 01), and Group 2 (circled '2') covers the cells (01, 11) and (01, 10).

DC \ BA		BA			
		00	01	11	10
00	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
11	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

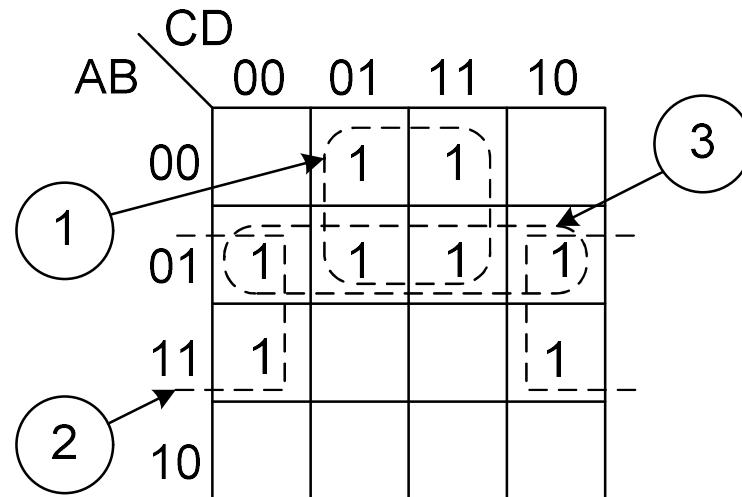
Diagram showing a 4x4 Karnaugh map for variables D, C, B, and A. The map is labeled with DC (rows) and BA (columns). The cells are numbered 0 through 15. The map shows two groups of 1s: a group of 2 (circled) covering cells 6, 7, 14, and 15, and a group of 1 (circled) covering cells 8 and 9. Dashed lines indicate the groupings.

$$m_{8,9} = D\bar{C}\bar{B}\bar{A} + D\bar{C}B\bar{A} = D\bar{C}\bar{B}(\bar{A} + A) = D\bar{C}\bar{B}$$

$$\begin{aligned} m_{6,7,14,15} &= \bar{D}C\bar{B}\bar{A} + \bar{D}CBA + DC\bar{B}\bar{A} + DCBA = \bar{D}CB(\bar{A} + A) + DCB(\bar{A} + A) = \\ &= \bar{D}CB + DCB = CB(\bar{D} + D) = CB \end{aligned}$$

$$f(D, C, B, A) = D\bar{C}\bar{B} + CB$$

Primjer:



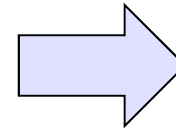
$$F = \bar{A}D + B\bar{D}$$

Napomena: Skupovi 1 i 2 su **bitni**, jer se mintermovi m_1 i m_3 obuhvataju samo skupom 1 zapisanim ekvivalentnim logičkim izrazom $\bar{A}D$, odnosno mintermovi m_{12} i m_{14} obuhvataju se samo skupom 2 zapisanim ekvivalentnim logičkim izrazom $B\bar{D}$

Skup 3 je **nebitan** (svi njegovi mintermovi obuhvaćeni su skupovima 1 i 2)

■ *Primjer.*

		CD			
	AB	00	01	11	10
00		1			
01			1		
11		1	1	1	
10				1	1



		CD			
	AB	00	01	11	10
00		1			
01			1		
11		1	1	1	
10				1	1

bitni skupovi

		CD			
	AB	00	01	11	10
00		1			
01			1		
11		1	1	1	
10				1	1

nebitni skupovi

$$F = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \begin{cases} ACD \\ ili \\ ABD \end{cases}$$

- *Primjer:* Naći minimalnu formu funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(A, B, C, D) = \sum m(0,1,2,5,8,9,10)$$

i zapisati je u obliku **proizvoda logičkih zbirova**.

Rješenje:

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
00	00	1	1	0	1
	01	0	1	0	0
11	11	0	0	0	0
	10	1	1	0	1

Diagram shows a 4x4 Karnaugh map for function F(A,B,C,D). The map is a 4x4 grid with rows labeled AB (00, 01, 11, 10) and columns labeled CD (00, 01, 11, 10). The values in the cells are: (00,00)=1, (00,01)=1, (00,11)=0, (00,10)=1; (01,00)=0, (01,01)=1, (01,11)=0, (01,10)=0; (11,00)=0, (11,01)=0, (11,11)=0, (11,10)=0; (10,00)=1, (10,01)=1, (10,11)=0, (10,10)=1. Three groups of 0s are circled and labeled with numbers 1, 2, and 3. Group 1 is a 2x2 square of 0s in the bottom-left quadrant (AB=11, CD=00-11). Group 2 is a 2x2 square of 0s in the top-right quadrant (AB=00-01, CD=11-10). Group 3 is a 2x2 square of 0s in the bottom-right quadrant (AB=11-10, CD=11-10).

$$F = (\bar{A} + \bar{B}) \cdot (\bar{C} + \bar{D}) \cdot (\bar{B} + D)$$

I način:

1. Pronalaženjem minimalne forme oblika zbira logičkih proizvoda, ali za funkciju **com(F)**,
2. Primjenom De Morganove T, nakon čega direktno slijedi zahtijevana minimalna forma funkcije F oblika proizvoda logičkih zborova.

II način:

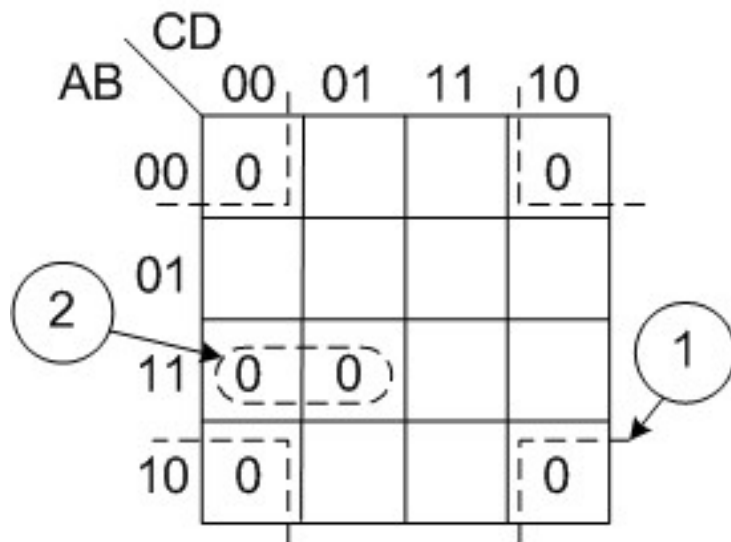
Direktnim prekrivanjem logičkih 0-a u K mapi (u ekvivalentnim izrazima oblika logičkog zbira, promjenljive koje ne mijenjaju vrijednost 0 uzimaju originalnu vrijednost, a one koje ne mijenjaju vrijednost 1 – komplementiranu).

- *Primjer:* Naći minimalnu formu funkcije zadate logičkim izrazom:

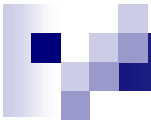
$$F(A, B, C, D) = (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (B + C + D) \cdot (B + \bar{C} + D)$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} F &= (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (B + C + D) \cdot (B + \bar{C} + D) = (\bar{A} + \bar{B} + C + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D}) \cdot \\ &\cdot (A + B + C + D) \cdot (\bar{A} + B + C + D) \cdot (A + B + \bar{C} + D) \cdot (\bar{A} + B + \bar{C} + D) = \\ &= \prod M(0, 2, 8, 10, 12, 13). \end{aligned}$$



$$F(A, B, C, D) = (B + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C)$$



- *Primjer.* Pronađi minimalnu formu **nekompletno definisane** funkcije F , sa tri "bilo što" uslova:

$$F(A, B, C, D) = \sum m(1,3,7,11,15) + \times(0,2,5).$$

Rješenje:

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

Diagram showing Karnaugh map with groupings: a group of four cells (00,01,11,10) in the first column (AB=00) is circled with a '1', and a group of four cells (00,01,11,10) in the third column (CD=11) is circled with a '2'.

$$F = \bar{A}\bar{B} + CD$$

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

Diagram showing Karnaugh map with groupings: a group of four cells (00,01,11,10) in the third column (CD=11) is circled with a '1', and a group of four cells (00,01,11,10) in the fourth column (CD=10) is circled with a '2'.

$$F = \bar{A}D + CD$$

AB \ CD		CD			
		00	01	11	10
AB	00	X	1	1	X
	01	0	X	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	1	0

Diagram showing Karnaugh map with groupings: a group of four cells (00,01,11,10) in the third column (CD=11) is circled with a '1', and a group of four cells (00,01,11,10) in the fourth column (CD=10) is circled with a '2'.

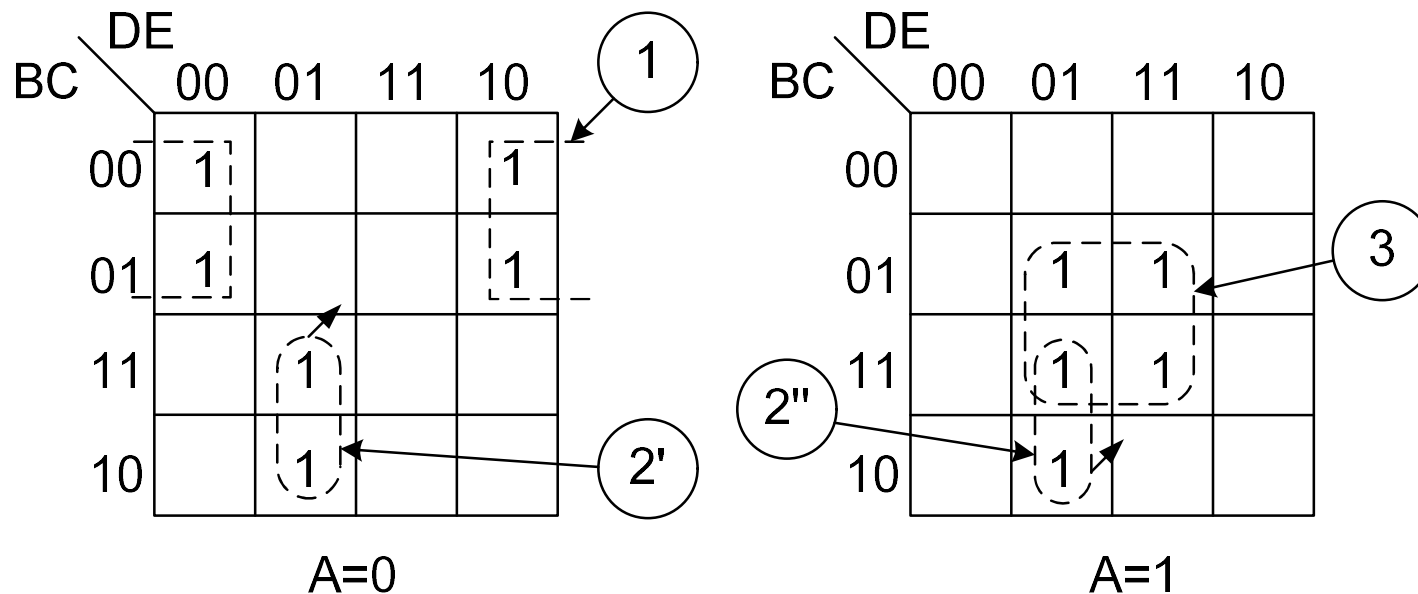
$$F = D \cdot (\bar{A} + C)$$

K mape za f-je sa pet promjenljivih

- *Primjer:* Pronaći uprošćeni oblik funkcije zadate logičkim izrazom:

$$F(A, B, C, D, E) = \sum m(0, 2, 4, 6, 9, 13, 21, 23, 25, 29, 31)$$

Rješenje:



$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{E} + \bar{B}\bar{D}E + ACE$$



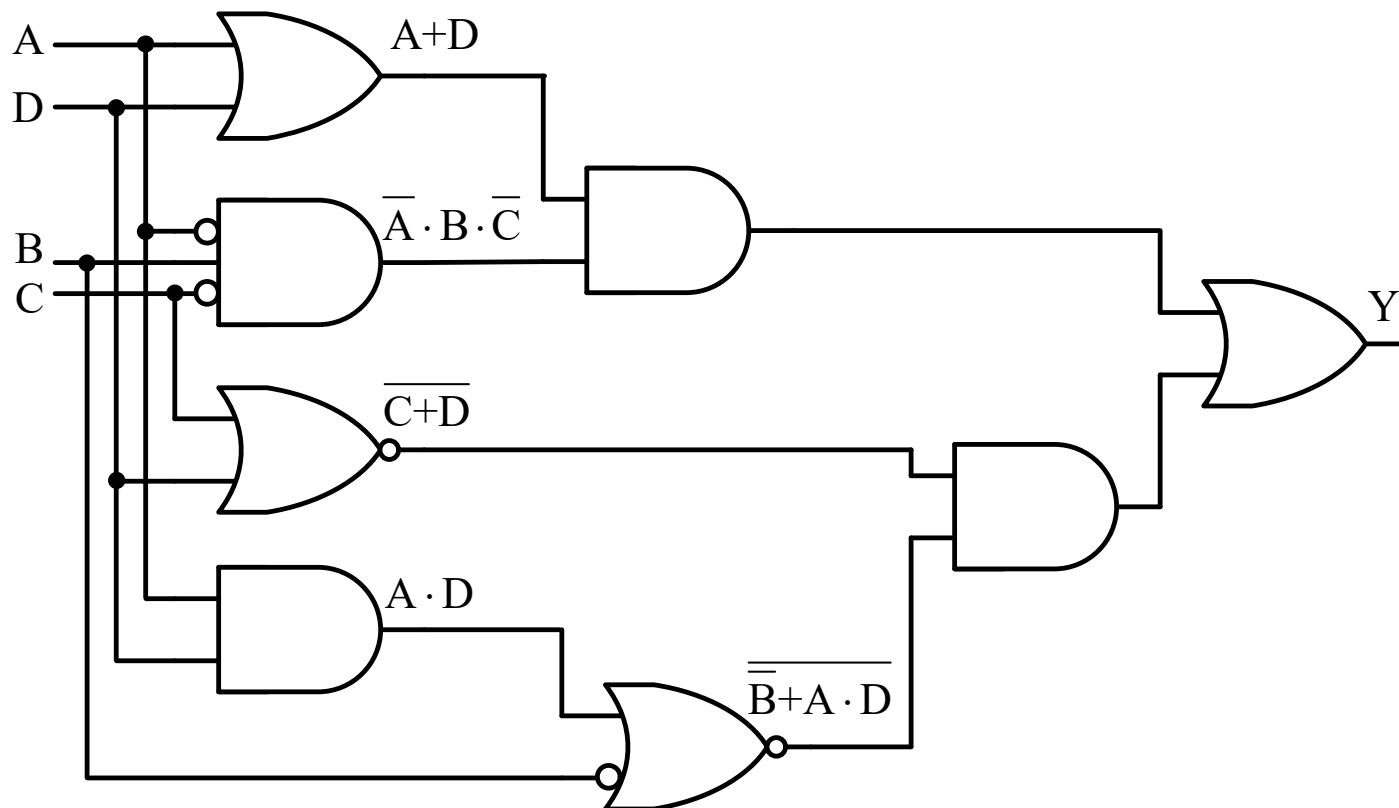
Osnovi računarstva I

Prekidačke mreže

- Posmatrajmo složenu prekidačku f-ju:

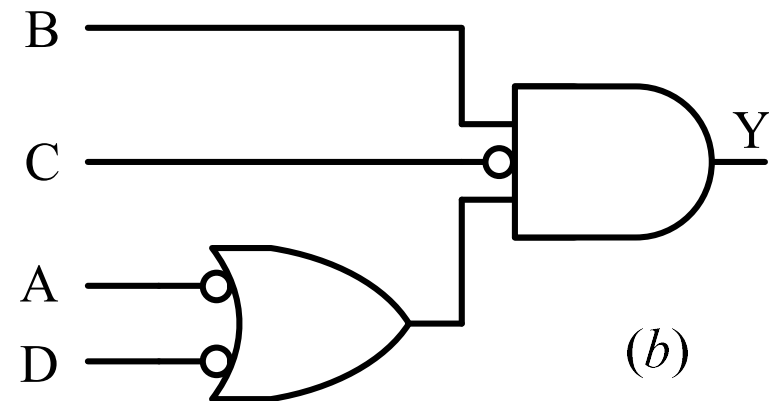
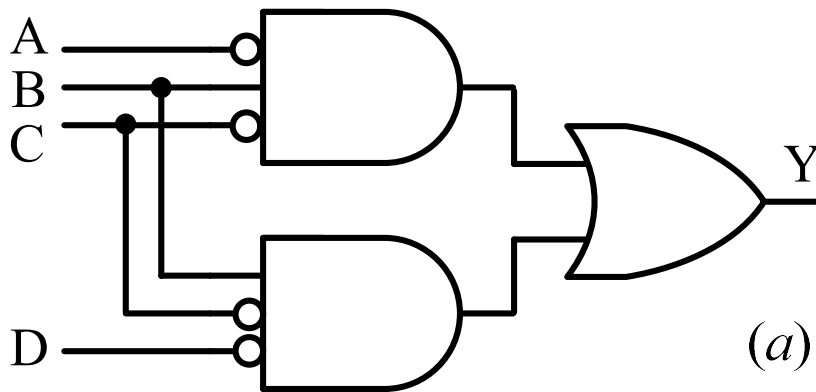
$$Y = (A + D) \cdot \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \overline{C + D} \cdot \bar{B} + A \cdot D$$

- Logička šema prekidačke mreže može se dobiti **direktnim preslikavanjem** posmatrane f-je u odgovarajući dijagram elementarnih logičkih kola:

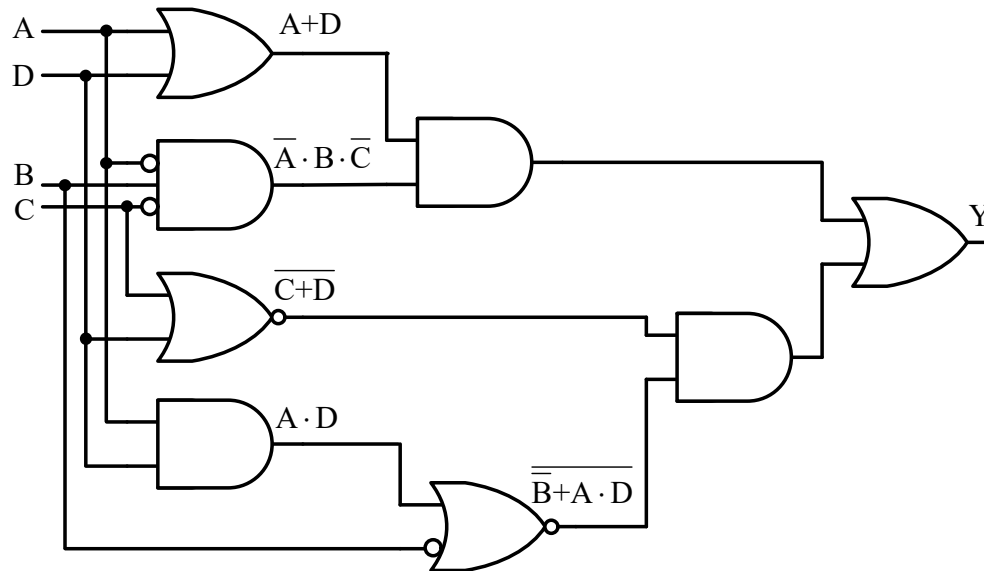


- Izlaz Y iste logičke vrijednosti veoma često se može realizovati pomoću jednostavnije mreže logičkih kola (realizacijom ekvivalentne prekidačke f-je dobijene algebarskom ili minimizacijom pomoću K mapa):

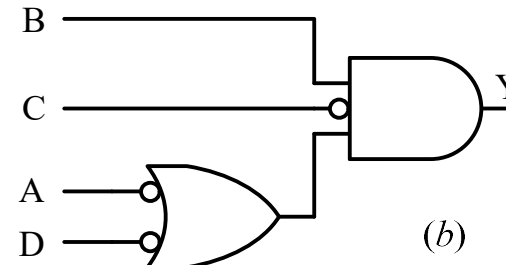
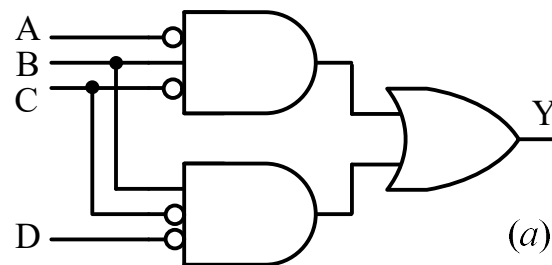
$$Y = \bar{A}B\bar{C} + B\bar{C}\bar{D} = B\bar{C} \cdot (\bar{A} + \bar{D})$$



- Prekidačke mreže za implementaciju funkcije ne razlikuju se samo u pogledu broja i tipa upotrijebljenih logičkih elemenata, već i po broju nivoa (stepeni) u strukturi mreže
- Stepen prekidačke mreže određen je najvećim br. redno vezanih log. kola kroz koja neki od ulaznih signala treba da prođe do izlaza mreže
- Četvorostepena:



- Dvostepene:





REALIZACIJA NORMALNIH FORMI PREKIDAČKIH FUNKCIJA UPOTREBOM LOGIČKIH NI I NILI KOLA

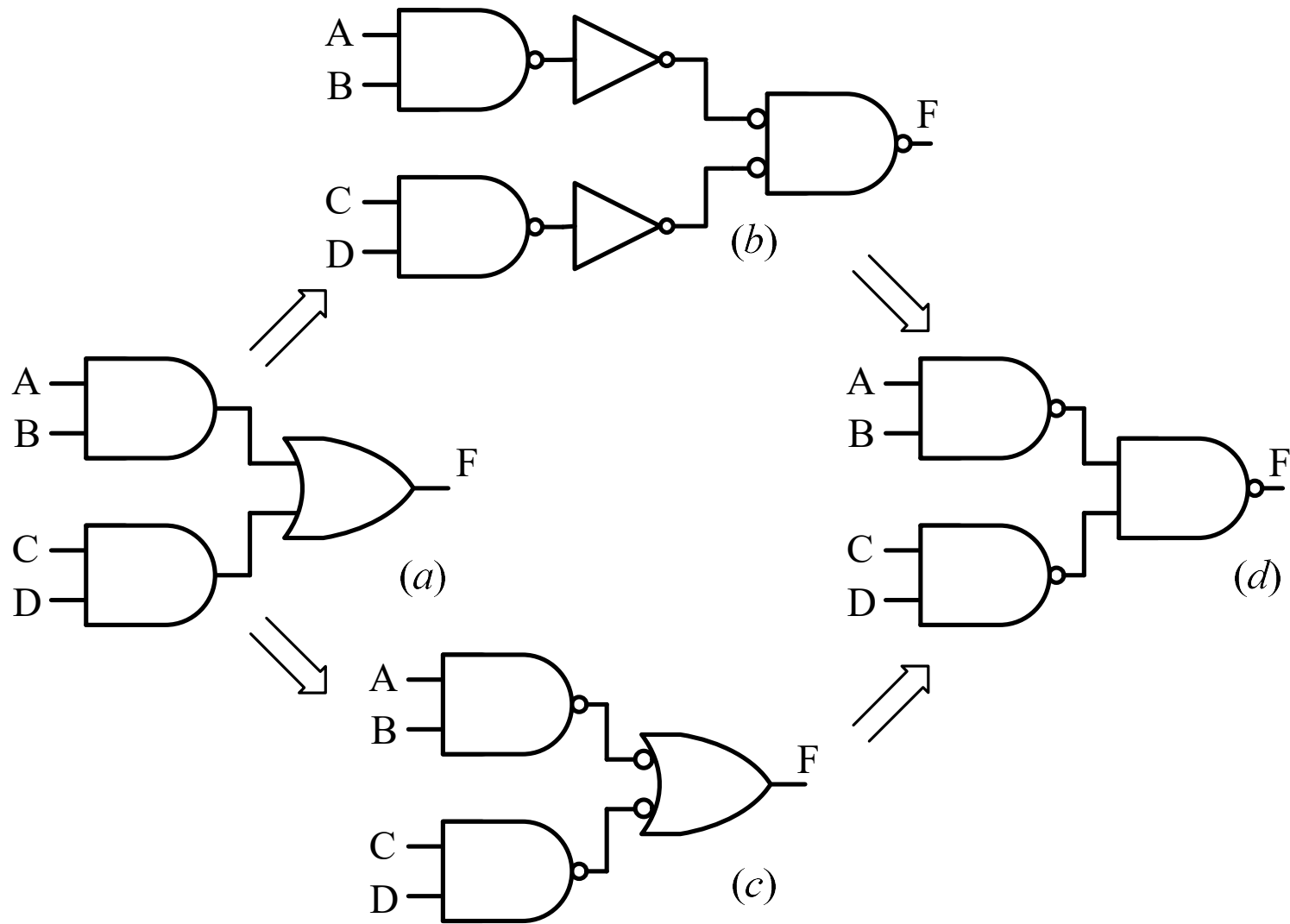
- U slučaju logičke funkcije oblika zbira logičkih proizvoda, implementacija **dvostepene** prekidačke mreže može se izvršiti **upotrebom isključivo logičkih NI kola**:

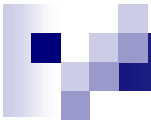
$$F = A \cdot B + C \cdot D = \overline{\overline{A \cdot B}} + \overline{\overline{C \cdot D}} = \overline{\overline{A \cdot B \cdot C \cdot D}}$$

- Analogno tome, funkcije oblika proizvoda logičkih zbirova mogu se implementirati **dvostepenom** prekidačkom mrežom, **koristeći isključivo logička NILI kola**.

$$F = (A + B) \cdot (C + D) = \overline{\overline{A + B}} \cdot \overline{\overline{C + D}} = \overline{\overline{A + B + C + D}}$$

$$F = A \cdot B + C \cdot D$$





$$F = (A + B) \cdot (C + D)$$

